СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Новохрост В.Г., БГУ, Минск

Рассмотрим следующую задачу Коши на отрезке $T = [0, a] \subset \boldsymbol{R}$:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = f(X(t))\dot{L}(t), \\ X(0) = x_0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь функция $f\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ ограничена и имеет конечное число точек разрыва; $L\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ – непрерывная функция ограниченной вариации, а $\dot{L}$ – ее обобщенная производная.

Данная задача, вообще говоря, не является корректной с точки зрения классической теории дифференциальных уравнений в силу разрывности функции *f*.

Подобного рода некорректные задачи исследовались и ранее. Один из подходов связан с рассмотрением уравнений в алгебре мнемофункций. Так в [1] описаны решения уравнения (1) с непрерывной функцией *f*, но разрывной функцией *L*.

Второй подход основан на теории дифференциальных включений, детально разработанной в [2].

В данной работе под решением уравнения (1) мы будем понимать решение следующего дифференциального включения с соответствующими начальными условиями:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) \in F(X(t))\dot{L}(t), \\ X(0) = x_0, \end{cases} \quad (2)$$

где *F* – многозначная функция, которая получается путем некоторого доопределения функции *f*. Вообще говоря, существует несколько способов доопределения функции *f* до многозначной функции *F*. Мы будем рассматривать так называемый метод *простейшего выпуклого доопределения*, в котором $F(x)$ есть наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее все предельные точки $f(x^*)$, $x^* \to x$, $x^* \neq x$. Таким образом, для ограниченной функции *f* получаем $F\colon \boldsymbol{R} \to E(\boldsymbol{R})$, где $E(\boldsymbol{R})$ – множество ограниченных замкнутых выпуклых подмножеств из $\boldsymbol{R}$.

Определение 1. *Под решением дифференциального включения* (2) *будем понимать такую непрерывную функцию* $X(t)$, *для которой существует следующее интегральное представление*

$$X(t) = \int_0^t u(s)\,dL(s),$$

где $u(t) \in F(X(t))$ *для всех* $t \in T$. *Функция* $u(\cdot)$ *называется селектором многозначного отображения F.*

Условия существования решений задачи (2) представлены в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть функция f ограничена и имеет конечное число точек разрыва. Многозначная функция F получена из функции f методом простейшего выпуклого доопределения, функция L – непрерывная функция ограниченной вариации. Тогда решение задачи* (2) *существует.*

Пусть функция *f* ограничена и имеет конечное число точек разрыва, тогда ее можно представить в виде

$$f(t) = f^c(t) + f^d(t),$$

где функции f^c и f^d – соответственно непрерывная и разрывная составляющие функции *f* , причем, разрывная составляющая f^d также будет иметь конечное число точек разрыва.

В следующих теоремах представлены достаточные условия единственности решений задачи (2).

Теорема 2. *Пусть функция f ограничена, имеет конечное число точек разрыва, в окрестностях которых она сохраняет знак, и функция* f^c *– непрерывная составляющая функции f является липшицевой функцией на отрезке T. Многозначная функция F получена из функции f методом простейшего выпуклого доопределения, функция L является непрерывной функцией ограниченной вариации. Тогда решение дифференциального включения* (2) *единственно*.

Теорема 3. *Пусть функция f ограничена, имеет конечное число точек разрыва и функция* f^c *– непрерывная составляющая функции f является липшицевой функцией на отрезке T. Многозначная функция F получена из функции f методом простейшего выпуклого доопределения. Функция L является монотонной и непрерывной, и* x_0 *не является точкой разрыва функции f. Тогда решение дифференциального включения* (2) *единственно*.

Замечание 1. Условие того, что x_0 не является точкой разрыва функции *f* в условиях теоремы 3 существенно для единственности решений задачи (2).

Литература

1. Ковальчук А.Н., Новохрост В.Г., Яблонский О.Л., Об аппроксимации дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами конечно-разностными уравнениями с осреднением // Известия ВУЗов. Математика. – 2005. – №3 – с.23-31.
2. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 223 с.

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ ИТЕРАТИВНОГО МЕТОДА

Савчук В.Ф., Голубцов И.А., БрГУ им. А.С.Пушкина, Брест

1.Постановка задачи

Решается операторное уравнение

$$Ax = y \tag{1}$$

с положительным ограниченным и самосопряженным оператором $A: H \to H$, в предположении, что нуль не является собственным значением оператора A. Причем $0 \in S_A$, то есть задача некорректна. Если решение уравнения (1) существует, то для его отыскания предлагается явный итеративный метод

$$x_{n+1} = (E - \alpha A^2)x_n + \alpha Ay, \; x_0 = 0. \tag{2}$$